参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一．选择题

（1）$\cos 300^\circ=$

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　（B）$-\frac{1}{2}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M=\{1,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，则 $N\cap(\complement_U M)=$

（A）$\{1,3\}$　（B）$\{1,5\}$　（C）$\{3,5\}$　（D）$\{4,5\}$

（3）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant 1,\\ x+y\geqslant 0,\\ x-y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

（4）已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_2a_3=5$，$a_7a_8a_9=10$，则 $a_4a_5a_6=$

（A）$5\sqrt{2}$　（B）7　（C）6　（D）$4\sqrt{2}$

（5）$(1-x)^4(1-\sqrt{x})^3$ 的展开式中 x^2 的系数是

（A）-6　（B）-3　（C）0　（D）3

（6）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=AA_1$，则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于

（A）30°　（B）45°　（C）60°　（D）90°

（7）已知函数 $f(x)=|\lg x|$．若 $a\neq b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $a+b$ 的取值范围是

（A）$(1,+\infty)$　（B）$[1,+\infty)$　（C）$(2,+\infty)$　（D）$[2,+\infty)$

（8）已知 F_1、F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$

（A）2　（B）4　（C）6　（D）8

（9）正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，BB_1与平面ACD_1所成角的余弦值为

（A）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

（10）设$a=\log_3 2$, $b=\ln 2$, $c=5^{-\frac{1}{2}}$，则

（A）$a<b<c$　（B）$b<c<a$　（C）$c<a<b$　（D）$c<b<a$

（11）已知圆 O 的半径为 1，PA、PB 为该圆的两条切线，A、B 为两切点，那么$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为

（A）$-4+\sqrt{2}$　（B）$-3+\sqrt{2}$　（C）$-4+2\sqrt{2}$　（D）$-3+2\sqrt{2}$

（12）已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若$AB=CD=2$，则四面体$ABCD$的体积的最大值为

（A）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　（C）$2\sqrt{3}$　（D）$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

第Ⅱ卷

本卷共 10 小题，共 90 分。

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

（13）不等式$\frac{x-2}{x^2+3x+2}>0$的解集是________________.

（14）已知α为第二象限的角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则$\tan 2\alpha=$________________.

（15）某学校开设 A 类选修课 3 门，B 类选修课 4 门，一位同学从中共选 3 门，若要求两类课程中各至少选一门，则不同的选法共有________________种.（用数字作答）

（16）已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为________________.

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分 10 分）

记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 设$S_3=12$，且$2a_1, a_2, a_3+1$成等比数列，求S_n.

（18）（本小题满分 12 分）

已知△ABC的内角A，B及其对边a，b满足$a+b=a\cot A+b\cot B$，求内角C.

（19）（本小题满分 12 分）

投到某杂志的稿件，先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审，则予以录用；若两位初审专家都未予通过，则不予录用；若恰能通过一位初审专家的评审，则再由第三位专家进行复审，若能通过复审专家的评审，则予以录用，否则不予录

用．设稿件能通过各初审专家评审的概率均为0.5，复审的稿件能通过评审的概率为0.3．各专家独立评审．

（Ⅰ）求投到该杂志的1篇稿件被录用的概率；

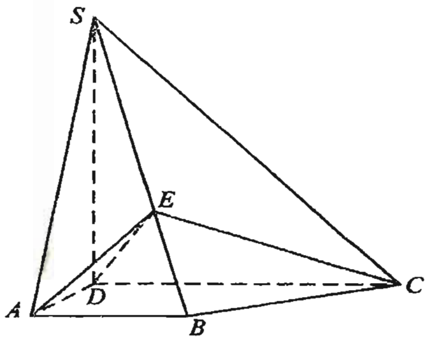
（Ⅱ）求投到该杂志的4篇稿件中，至少有2篇被录用的概率．

（20）（本小题满分12分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AB//DC$，$AD\perp DC$，$AB=AD=1$，$DC=SD=2$，E 为棱 SB 上的一点，平面 $EDC\perp$ 平面 SBC．

（Ⅰ）证明：$SE=2EB$；

（Ⅱ）求二面角 $A-DE-C$ 的大小．



（21）（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=3ax^4-2(3a+1)x^2+4x$．

（Ⅰ）当 $a=\frac{1}{6}$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，求 a 的取值范围．

（22）（本小题满分12分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $K(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 D．

（Ⅰ）证明：点 F 在直线 BD 上；

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\frac{8}{9}$，求△$BDK$ 的内切圆 M 的方程．

2010年普通高等学校招生全国统一考试
文科数学试题(必修+选修Ⅰ)参考答案

一．选择题

（1）C　（2）C　（3）B　（4）A　（5）A　（6）C

（7）C　（8）B　（9）D　（10）C　（11）D　（12）B

二．填空题

（13）$\{x\mid -2<x<-1,\text{ 或 } x>2\}$（14）$-\dfrac{24}{7}$ （15）30 （16）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三．解答题

（17）解：设数列$\{a_n\}$的公差为d. 依题设有

$$\begin{cases}2a_1(a_3+1)=a_2^2,\\ a_1+a_2+a_3=12,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}a_1^2+2a_1d-d^2+2a_1=0,\\ a_1+d=4.\end{cases}$$

解得 $a_1=1,\ d=3$，或 $a_1=8, d=-4$.

因此 $S_n=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，或 $S_n=2n(5-n)$.

（18）解：

由$a+b=a\cot A+b\cot B$及正弦定理得

$$\sin A+\sin B=\cos A+\cos B,$$

$$\sin A-\cos A=\cos B-\sin B,$$

从而 $$\sin A\cos\frac{\pi}{4}-\cos A\sin\frac{\pi}{4}=\cos B\sin\frac{\pi}{4}-\sin B\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\sin(A-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}-B).$$

又$0<A+B<\pi$，

故 $$A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-B,$$

$$A+B=\frac{\pi}{2},$$

所以 $$C=\frac{\pi}{2}.$$

（19）解：

（Ⅰ）记A表示事件：稿件能通过两位初审专家的评审；

B表示事件：稿件恰能通过一位初审专家的评审；

C表示事件：稿件能通过复审专家的评审；

D表示事件：稿件被录用.

则 $D=A+B\cdot C$，

$P(A)=0.5\times0.5=0.25$，$P(B)=2\times0.5\times0.5=0.5$，$P(C)=0.3$，

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A+B\cdot C)\\&=P(A)+P(B\cdot C)\\&=P(A)+P(B)P(C)\\&=0.25+0.5\times0.3\\&=0.40.\end{aligned}$$

（Ⅱ）记A_0表示事件：4篇稿件中没有1篇被录用；

A_1表示事件：4篇稿件中恰有1篇被录用；

A_2表示事件：4篇稿件中至少有2篇被录用.

$\overline{A_2}=A_0+A_1$.

$P(A_0)=(1-0.4)^4=0.1296$,

$P(A_1)=C_4^1\times0.4\times(1-0.4)^3=0.3456$,

$$P(\overline{A_2})=P(A_0+A_1)=P(A_0)+P(A_1)$$
$$=0.1296+0.3456$$
$$=0.4752,$$

$P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-0.4752=0.5248$.

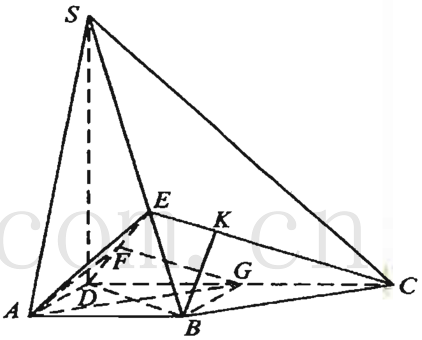
（20）解法一：

（Ⅰ）连结BD，取DC的中点G，连结BG，

由此知$DG=GC=BG=1$，即$\triangle DBC$为直角三角形，故$BC\perp BD$.

又$SD\perp$平面$ABCD$，故$BC\perp SD$，

所以，$BC\perp$平面BDS，$BC\perp DE$.



作$BK\perp EC$，K为垂足，因平面$EDC\perp$平面SBC，故$BK\perp$平面EDC，$BK\perp DE$. DE与平面SBC内的两条相交直线BK、BC都垂直.

$DE\perp$平面SBC，$DE\perp EC$，$DE\perp SB$.

$$SB=\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{6},$$

$$DE=\frac{SD\cdot DB}{SB}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$EB=\sqrt{DB^2-DE^2}=\frac{\sqrt{6}}{3},\quad SE=SB-EB=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以，$SE=2EB$.

（Ⅱ）由$SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=\sqrt{5}$，$AB=1$，$SE=2EB$，$AB\perp SA$，知

$AE=\sqrt{(\frac{1}{3}SA)^2+(\frac{2}{3}AB)^2}=1$，又$AD=1$.

故$\triangle ADE$为等腰三角形.

取ED中点F，连结AF，则$AF\perp DE$，$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

连结FG，则$FG\parallel EC$，$FG\perp DE$.

所以，$\angle AFG$是二面角$A-DE-C$的平面角.

连结AG，$AG=\sqrt{2}$，$FG=\sqrt{DG^2-DF^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

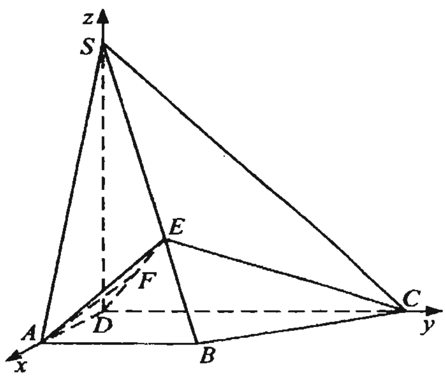
$$\cos\angle AFG=\frac{AF^2+FG^2-AG^2}{2\cdot AF\cdot FG}=-\frac{1}{2},$$

所以，二面角$A-DE-C$的大小为120°.

解法二：

以 D 为坐标原点，射线 DA 为 x 轴正半轴，建立如图所示的直角坐标系 $D-xyz$.

设 $A(1,0,0)$，则 $B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,2)$.



（Ⅰ）$\overrightarrow{SC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{SC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$ 得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

故 $2b-2c=0$，$-a+b=0$.

令 $a=1$，则 $b=1$，$c=1$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

又设 $\overrightarrow{SE}=\lambda\overrightarrow{EB}$ $(\lambda>0)$，则

$$E\left(\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{2}{1+\lambda}\right).$$

$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{2}{1+\lambda}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

设平面 CDE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DE}$，$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DC}$，得

$$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\quad \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0.$$

故 $\frac{\lambda x}{1+\lambda}+\frac{\lambda y}{1+\lambda}+\frac{2z}{1+\lambda}=0$，$2y=0$.

令 $x=2$，则 $\boldsymbol{m}=(2,0,-\lambda)$.

由平面 $DEC\perp$ 平面 SBC 得 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$2-\lambda=0$，$\lambda=2$.

故 $SE=2EB$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $E\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，取 DE 中点 F，则 $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{FA}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

故 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，由此得 $FA\perp DE$.

又 $\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$，故 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，由此得 $EC\perp DE$，

向量 $\overrightarrow{FA}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 的夹角等于二面角 $A-DE-C$ 的平面角.

于是 $\cos\langle\overrightarrow{FA},\overrightarrow{EC}\rangle=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{FA}||\overrightarrow{EC}|}=-\frac{1}{2}$，

所以，二面角 $A-DE-C$ 的大小为 $120°$.

（21）解：（Ⅰ）$f'(x)=4(x-1)(3ax^2+3ax-1)$.

当 $a=\frac{1}{6}$ 时，$f'(x)=2(x+2)(x-1)^2$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内单调减，在 $(-2,+\infty)$ 内单调增，在 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极小值.

所以 $f(-2)=-12$ 是 $f(x)$ 的极小值.

（Ⅱ）在 $(-1,1)$ 上，$f(x)$ 单调增加当且仅当

$$f'(x)=4(x-1)(3ax^2+3ax-1)\geqslant 0,$$

即 $$3ax^2+3ax-1\leqslant 0, \qquad ①$$

（i）当 $a=0$ 时①恒成立；

（ii）当 $a>0$ 时①成立，当且仅当 $3a\cdot 1^2+3a\cdot 1-1\leqslant 0$.

解得 $$a\leqslant \frac{1}{6}.$$

（iii）当 $a<0$ 时①成立，即 $3a(x+\frac{1}{2})^2-\frac{3a}{4}-1\leqslant 0$ 成立，

当且仅当 $$-\frac{3a}{4}-1\leqslant 0.$$

解得 $$a\geqslant -\frac{4}{3}.$$

综上，a 的取值范围是 $[-\frac{4}{3},\frac{1}{6}]$.

（22）解：

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$D(x_1,-y_1)$，l 的方程为 $x=my-1\ (m\neq 0)$.

（Ⅰ）将 $x=my-1$ 代入 $y^2=4x$ 并整理得

$$y^2-4my+4=0,$$

从而 $$y_1+y_2=4m,\quad y_1y_2=4. \qquad ①$$

直线 BD 的方程为

$$y-y_2=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_2),$$

即 $$y-y_2=\frac{4}{y_2-y_1}\cdot(x-\frac{y_2^2}{4}).$$

令 $y=0$，得 $x=\frac{y_1y_2}{4}=1$.

所以点 $F(1,0)$ 在直线 BD 上.

（Ⅱ）由①知，

$$x_1+x_2=(my_1-1)+(my_2-1)=4m^2-2,$$

$$x_1x_2=(my_1-1)(my_2-1)=1.$$

因为 $\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，

$$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+4=8-4m^2,$$

故 $$8-4m^2=\frac{8}{9},$$

解得.　　$m=\pm\frac{4}{3}$.

所以 l 的方程为

$$3x+4y+3=0,\ 3x-4y+3=0.$$

又由①知　　$y_2-y_1=\pm\sqrt{(4m)^2-4\times4}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{7}$,

故直线 BD 的斜率

$$\frac{4}{y_2-y_1}=\pm\frac{3}{\sqrt{7}},$$

因而直线 BD 的方程为

$$3x+\sqrt{7}y-3=0,\ 3x-\sqrt{7}y-3=0.$$

因为 KF 为 $\angle BKD$ 的平分线，故可设圆心 $M(t,0)$ $(-1<t<1)$，$M(t,0)$ 到 l 及 BD 的距离分别为 $\frac{3|t+1|}{5}$, $\frac{3|t-1|}{4}$.

由 $\frac{3|t+1|}{5}=\frac{3|t-1|}{4}$ 得

$$t=\frac{1}{9}，\text{或}\ t=9\ （舍去）,$$

故圆 M 的半径 $r=\frac{3|t+1|}{5}=\frac{2}{3}$.

所以圆 M 的方程为 $(x-\frac{1}{9})^2+y^2=\frac{4}{9}$.

2010年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学(必修+选修Ⅱ)

第Ⅰ卷

本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一．选择题