

2010 年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	45	16	9	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
本试卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在试卷上无效。

一、选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 $(-1, 1]$, 则函数 $e^{f(x-1)}$ 的定义域为
A. $[-2, 2]$ B. $(-1, 1]$ C. $(-2, 0]$ D. $(0, 2]$
2. 若 $f(x)$ ($x \in R$) 为奇函数, 则下列函数为偶函数的是
A. $y = \sqrt[3]{x^3 - 1} f(x)$, $x \in [-1, 1]$
B. $y = x f(x) + \tan^3 x$, $x \in (-\pi, \pi)$
C. $y = x^3 \sin x - f(x)$, $x \in [-1, 1]$
D. $y = f(x) e^{x^2} \sin^5 x$, $x \in [-\pi, \pi]$
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{2x} - 1$ 是 $\sin 3x$ 的
A. 低阶无穷小 B. 高阶无穷小
C. 等价无穷小 D. 同阶非等价无穷小
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^3}, & x > 0 \\ \frac{1}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 连续点 D. 第二类间断点

5. 下列方程在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根的为

- A. $x^2 + 2 = 0$ B. $\sin x = 1 - \pi$
C. $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ D. $x^2 + 1 + \arctan x = 0$

6. 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + 3h)}{2h} =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

7. 曲线 $y = x \ln x$ 的平行于直线 $x - y + 1 = 0$ 的切线方程是

- A. $y = x - 1$ B. $y = -(x + 1)$
C. $y = -x + 1$ D. $y = (\ln x + 1)(x - 1)$

8. 设函数 $y = \sqrt{1 - x^2} - 2 \sin \frac{\pi}{5}$, 则 $y' =$

- A. $-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - 2 \cos \frac{\pi}{5}$ B. $-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
C. $\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$ D. $-\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2}{5} \cos \frac{\pi}{5}$

9. 若函数 $f(x)$ 满足 $df(x) = -2x \sin x^2 dx$, 则 $f(x) =$

- A. $\cos x^2$ B. $\cos x^2 + C$ C. $\sin x^2 + C$ D. $-\cos x^2 + C$

10. $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-x} \sin(1 - 2x) dx =$

- A. $e^{-x} \sin(1 - 2x)$ B. $e^{-x} \sin(1 - 2x) dx$
C. $e^{-x} \sin(1 - 2x) + C$ D. 0

11. 若 $f(-x) = f(x)$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内

- A. $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ B. $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$
C. $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ D. $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

12. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 在点 x_0 处不可导, $x_0 \in (a, b)$, 则

- A. x_0 是 $f(x)$ 的极大值点 B. x_0 是 $f(x)$ 的极小值点
C. x_0 不是 $f(x)$ 的极值点 D. x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点

13. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为

- A. $x=1$ B. $x=2$ C. $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ D. $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

14. 曲线 $y = \frac{2 \arctan x}{5x} + 3$

- A. 仅有水平渐近线
B. 仅有垂直渐近线
C. 既有水平渐近线, 又有垂直渐近线
D. 既无水平渐近线, 又无垂直渐近线

15. 若 $\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int df(x) =$

- A. $-\sin x + C$ B. $\sin x + C$ C. $-\cos x + C$ D. $\cos x + C$

16. 设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 1)$, 且在该曲线上任意一点 (x, y) 处切线的斜率为

$$x + e^x, \text{ 则 } f(x) =$$

- A. $\frac{x^2}{2} - e^x$ B. $\frac{x^2}{2} + e^x$ C. $x^2 + e^x$ D. $x^2 - e^x$

17. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} dx =$

- A. 2 B. 0 C. 1 D. -1

18. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_a^{x^2} f(t) dt$ 是

- A. $f(x)$ 的一个原函数 B. $f(x)$ 的全体原函数
C. $2xf(x^2)$ 的一个原函数 D. $2xf(x^2)$ 的全体原函数

19. 下列广义积分收敛的是

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$
C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

20. 微分方程 $x^4(y'')^2 + y' - x^2 y = 0$ 的阶数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

21. 已知向量 $\vec{a} = \{5, x, -2\}$ 和 $\vec{b} = \{y, 6, 4\}$ 平行, 则 x 和 y 的值分别为

- A. -4, 5 B. -3, -10 C. -4, -10 D. -10, -3

22. 平面 $x + y + z = 1$ 与平面 $x + y - z = 2$ 的位置关系是

- A. 重合 B. 平行
C. 垂直 D. 相交但不垂直

23. 下列方程在空间直角坐标系中表示的曲面为柱面的是

- A. $y^2 + z^2 = 1$ B. $z = x^2 + y^2$
C. $z^2 = x^2 + y^2$ D. $z = x^2 - y^2$

24. 关于函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 下列表述错误的是

- A. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续 B. $f_x(0, 0) = 0$
C. $f_y(0, 0) = 0$ D. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微

25. 设函数 $z = \frac{x}{y} \ln(x - y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

- A. $\frac{x}{y(x-y)}$ B. $-\frac{x \ln(x-y)}{y^2}$
C. $\frac{\ln(x-y)}{y} + \frac{x}{y(x-y)}$ D. $-\frac{x \ln(x-y)}{y^2} - \frac{x}{y(x-y)}$

26. 累次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ 写成另一种次序的积分是

- A. $\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx$ B. $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$
C. $\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_{-1}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

27. 设 $D = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$, 则 $\iint_D dx dy =$

- A. 2 B. 16 C. 12 D. 4

28. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^{2n}$ 的收敛区间为

- A. $(-\sqrt{R}, \sqrt{R})$ B. $(2-R, 2+R)$
C. $(-R, R)$ D. $(2-\sqrt{R}, 2+\sqrt{R})$

29. 下列级数绝对收敛的是

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{2n^2-1}}$

30. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 在点 $x=1$ 处发散, 在点 $x=5$ 处收敛, 则在点 $x=0$,

- $x=2$, $x=4$, $x=6$ 中使该级数发散的点的个数有
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

二、填空题 (每空 2 分, 共 20 分)

31. 设 $f(3-2x)$ 的定义域为 $(-3, 4]$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.

32. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}) =$ _____.

33. 设函数 $f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$, 则 $f^{(4)}(x) =$ _____.

34. 设参数方程 $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t^2-1 \end{cases}$ 所确定的函数为 $y = y(x)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

35. $\int (\ln x + 1) dx =$ _____.

36. 点 $(3, 2, -1)$ 到平面 $x+y+z-1=0$ 的距离是_____.

37. 函数 $z = (1+y)^x$ 在点 $(1, 1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

38. 设 L 为三个顶点分别为 $(0, 0)$, $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的三角形边界, L 的方向为逆时针方向, 则 $\oint_L (xy^2 - y^3) dx + (x^2 y - 3xy^2) dy =$ _____.

39. 已知微分方程 $y' + ay = e^x$ 的一个特解为 $y = xe^x$, 则 $a =$ _____.

40. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ 的和为_____.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 45 分)

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(e^x - 1) \sin x}{1 - \cos x} - \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{x^4} \right]$.

42. 设由方程 $e^y - xy^2 = e^2$ 确定的函数为 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

43. 求不定积分 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$.

44. 求定积分 $\int_0^2 (x + \sqrt{2x - x^2}) dx$.

45. 求过点 $(1, 2, -5)$ 且与直线 $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ 平行的直线方程.

46. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x$ 的极值.

47. 将 $f(x) = \frac{3x}{2x^2 + x - 1}$ 展开成 x 的幂级数.

48. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所围成的闭区域.

49. 求微分方程 $9y'' - 6y' + y = 0$ 的通解.

四、应用题 (每小题 8 分, 共 16 分)

50. 要做一个容积为 V 的圆柱形带盖容器, 问它的高与底面半径的比值是多少时用料最省?

51. 平面图形 D 由曲线 $y = x^2$, 直线 $y = 2 - x$ 及 x 轴所围成. 求:

(1) D 的面积;

(2) D 绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积.

五、证明题 (9 分)

52. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$,

$f(1) = 2$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 2\xi + 1$ 成立.