绝密 ★ 启用前

2009年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学(必修+选修Ⅱ)

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。考生作答时，将答案答在答题卡上，在本试题卷上答题无效。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必先认真核对条形码上的姓名、考生号、考场号和座位号，无误后将本人姓名、考生号、考场号和座位号填在答题卡相应位置，座位号同时填涂在答题卡背面左上角，将条形码粘贴在答题卡指定的位置，并将试题卷装订线内项目填写清楚。

2. 选择题答案必须使用2B铅笔规范填涂。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

3. 非选择题答题时，必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔书写；作图时，可用2B铅笔，笔迹要清晰。

4. 严格按题号所指示的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

5. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁在答题卡上作任何标记，严禁使用涂改液和修正带。

第Ⅰ卷

本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么n次独立重复试验中事件A恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R表示球的半径

一．选择题

（1）设集合 $A=\{4,5,7,9\}, B=\{3,4,7,8,9\}$，全集 $U=A\cup B$，则集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中的元素共有

（A）3 个　　（B）4 个　　（C）5 个　　（D）6 个

（2）已知 $\dfrac{\overline{z}}{1+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$，则复数 $z=$

（A）$-1+3\mathrm{i}$　　（B）$1-3\mathrm{i}$　　（C）$3+\mathrm{i}$　　（D）$3-\mathrm{i}$

（3）不等式 $|\dfrac{x+1}{x-1}|<1$ 的解集为

（A）$\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$　　（B）$\{x|0<x<1\}$

（C）$\{x|-1<x<0\}$　　（D）$\{x|x<0\}$

（4）设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，则该双曲线的离心率等于

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\sqrt{6}$

（5）甲组有 5 名男同学、3 名女同学；乙组有 6 名男同学、2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学，则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有

（A）150 种　　（B）180 种　　（C）300 种　　（D）345 种

（6）设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的最小值为

（A）-2　　（B）$\sqrt{2}-2$　　（C）-1　　（D）$1-\sqrt{2}$

（7）已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点，则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

（8）如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图像关于点 $(\dfrac{4\pi}{3},0)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

（9）已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 a 的值为

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

（10）已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°，动点 P、Q 分别在面 α、β 内，P 到 β 的距离为 $\sqrt{3}$，Q 到 α 的距离为 $2\sqrt{3}$，则 P、Q 两点之间距离的最小值为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）4

（11）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则

（A）$f(x)$ 是偶函数　　（B）$f(x)$ 是奇函数

（C）$f(x)=f(x+2)$　　（D）$f(x+3)$ 是奇函数

（12）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，右准线为 l，点 $A\in l$，线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，则 $|\overrightarrow{AF}|=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）3

第Ⅱ卷

本卷共 10 小题，共 90 分。

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上.

（13）$(x-y)^{10}$ 的展开式中，x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于____.

（14）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_9=72$，则 $a_2+a_4+a_9=$____.

（15）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上. 若 $AB=AC=AA_1=2$，

$\angle BAC=120^\circ$，则此球的表面积等于____.

（16）若 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$，则函数 $y=\tan 2x\tan^3 x$ 的最大值为____.

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分 10 分）

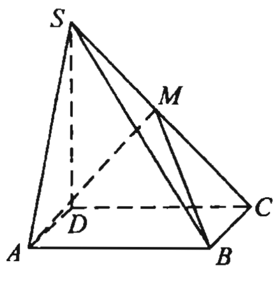
在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c. 已知 $a^2-c^2=2b$，且 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$，求 b.

（18）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，$DC=SD=2$. 点 M 在侧棱 SC 上，$\angle ABM=60^\circ$.

（Ⅰ）证明：M 是侧棱 SC 的中点；

（Ⅱ）求二面角 $S-AM-B$ 的大小.



（19）（本小题满分 12 分）

甲、乙二人进行一次围棋比赛，约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束. 假设在一局中，甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，各局比赛结果相互独立. 已知前 2 局中，甲、乙各胜 1 局.

（Ⅰ）求甲获得这次比赛胜利的概率；

（Ⅱ）设 ξ 表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，求 ξ 的分布列及数学期望.

（20）（本小题满分 12 分）

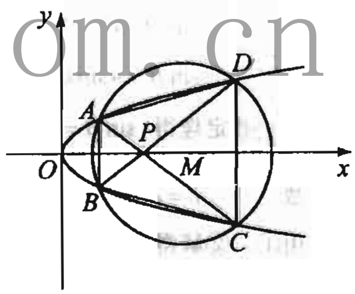
在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$.

（Ⅰ）设 $b_n=\frac{a_n}{n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

（21）（本小题满分 12 分）

如图，已知抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A、B、C、D 四个点.



（Ⅰ）求 r 的取值范围；

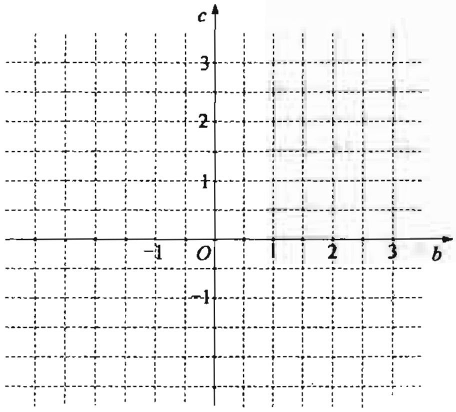
（Ⅱ）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 AC、BD 的交点 P 的坐标.

（22）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0]$，$x_2\in[1,2]$.

（Ⅰ）求 b、c 满足的约束条件，并在下面的坐标平面内，画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域；

（Ⅱ）证明：$-10\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}$.



2009年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题(必修+选修Ⅱ)参考答案

一. 选择题

（1）A （2）B （3）D （4）C （5）D （6）D

（7）D （8）A （9）B （10）C （11）D （12）A

二. 填空题

（13）-240 （14）24 （15）20π （16）-8

三. 解答题

（17）解:

由余弦定理得

$$a^2-c^2=b^2-2bc\cos A.$$

又 $a^2-c^2=2b,\ b\neq 0$，

所以 $b=2c\cos A+2$. ①

又 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$，

$\sin A\cos C+\cos A\sin C=4\cos A\sin C$，

$\sin(A+C)=4\cos A\sin C$，

$\sin B=4\sin C\cos A$.

由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b}{c}\sin C$，

故 $b=4c\cos A$. ②

由①、②解得

$b=4$.

（18）解法一:

（Ⅰ）作 $ME\,//\,CD$ 交 SD 于点 E，则 $ME\,//\,AB$， $ME\perp$平面 SAD.

连接 AE，则四边形 $ABME$ 为直角梯形.

作 $MF\perp AB$，垂足为 F，则 $AFME$ 为矩形.

设 $ME=x$，则 $SE=x$， $AE=\sqrt{ED^2+AD^2}=\sqrt{(2-x)^2+2}$，

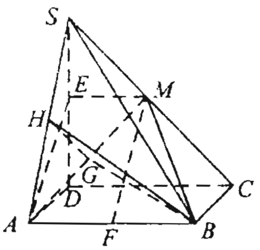
$MF=AE=\sqrt{(2-x)^2+2}$，$FB=2-x$.

由 $MF=FB\cdot\tan 60^\circ$，得 $\sqrt{(2-x)^2+2}=\sqrt{3}(2-x)$，

解得 $x=1$.

即 $ME=1$，从而 $ME=\dfrac{1}{2}DC$，

所以 M 为侧棱 SC 的中点.



（Ⅱ）$MB=\sqrt{BC^2+MC^2}=2$，又 $\angle ABM=60°$，$AB=2$，所以 $\triangle ABM$ 为等边三角形.

又由（Ⅰ）知 M 为 SC 中点，

$SM=\sqrt{2}$, $SA=\sqrt{6}$, $AM=2$，故 $SA^2=SM^2+AM^2$, $\angle SMA=90°$.

取 AM 中点 G，连结 BG，取 SA 中点 H，连结 GH，则 $BG\perp AM$, $GH\perp AM$，由此知 $\angle BGH$ 为二面角 $S-AM-B$ 的平面角.

连接 BH. 在 $\triangle BGH$ 中，

$$BG=\frac{\sqrt{3}}{2}AM=\sqrt{3}，\quad GH=\frac{1}{2}SM=\frac{\sqrt{2}}{2}，\quad BH=\sqrt{AB^2+AH^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}，$$

所以
$$\cos\angle BGH=\frac{BG^2+GH^2-BH^2}{2\cdot BG\cdot GH}=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

二面角 $S-AM-B$ 的大小为 $\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

解法二：

以 D 为坐标原点，射线 DA 为 x 轴正半轴，建立如图所示的直角坐标系 $D-xyz$.

设 $A(\sqrt{2},0,0)$，则 $B(\sqrt{2},2,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,2)$.

（Ⅰ）设 $\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{MC}$ $(\lambda>0)$，则

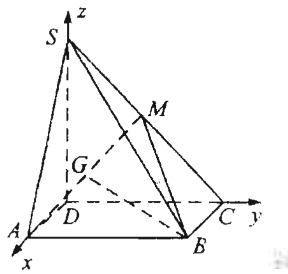
$M(0,\frac{2\lambda}{1+\lambda},\frac{2}{1+\lambda})$, $\overrightarrow{MB}=(\sqrt{2},\frac{2}{1+\lambda},\frac{-2}{1+\lambda})$.

又 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$, $\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB}\rangle=60°$，

故 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{MB}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos 60°$，

即 $\frac{4}{1+\lambda}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\frac{2}{1+\lambda})^2+(\frac{-2}{1+\lambda})^2}$，

解得 $\lambda=1$，即 $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{MC}$.



所以 M 为侧棱 SC 的中点.

（Ⅱ）由 $M(0,1,1)$, $A(\sqrt{2},0,0)$，得 AM 的中点 $G(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

又 $\overrightarrow{GB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{MS}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,1)$.

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\ \overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AM}=0，$$

所以 $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AM}$.

因此 $\langle\overrightarrow{GB},\overrightarrow{MS}\rangle$ 等于二面角 $S-AM-B$ 的平面角.

$$\cos\langle\overrightarrow{GB},\overrightarrow{MS}\rangle=\frac{\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{MS}}{|\overrightarrow{GB}|\cdot|\overrightarrow{MS}|}=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以二面角 $S-AM-B$ 的大小为 $\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

（19）解：

记 A_i 表示事件：第 i 局甲获胜，$i=3,4,5$，

B_j 表示事件：第 j 局乙获胜，$j=3,4$.

（Ⅰ）记 B 表示事件：甲获得这次比赛的胜利.

因前两局中，甲、乙各胜一局，故甲获得这次比赛的胜利当且仅当在后面的比赛中，甲先胜 2 局，从而

$$B=A_3\cdot A_4+B_3\cdot A_4\cdot A_5+A_3\cdot B_4\cdot A_5,$$

由于各局比赛结果相互独立，故

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_3\cdot A_4)+P(B_3\cdot A_4\cdot A_5)+P(A_3\cdot B_4\cdot A_5)\\&=P(A_3)P(A_4)+P(B_3)P(A_4)P(A_5)+P(A_3)P(B_4)P(A_5)\\&=0.6\times0.6+0.4\times0.6\times0.6+0.6\times0.4\times0.6\\&=0.648.\end{aligned}$$

（Ⅱ）ξ 的可能取值为 2，3.

由于各局比赛结果相互独立，所以

$$\begin{aligned}P(\xi=2)&=P(A_3\cdot A_4+B_3\cdot B_4)\\&=P(A_3\cdot A_4)+P(B_3\cdot B_4)\\&=P(A_3)P(A_4)+P(B_3)P(B_4)\\&=0.6\times0.6+0.4\times0.4\\&=0.52,\end{aligned}$$

$$P(\xi=3)=1-P(\xi=2)=1-0.52=0.48.$$

ξ 的分布列为

ξ	2	3
P	0.52	0.48

$$\begin{aligned}E\xi&=2\times P(\xi=2)+3\times P(\xi=3)\\&=2\times0.52+3\times0.48\\&=2.48.\end{aligned}$$

（20）解：

（Ⅰ）由已知得 $b_1=a_1=1$，且 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^n}$，

即 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2^n}$，

从而 $b_2=b_1+\frac{1}{2}$，

$b_3=b_2+\frac{1}{2^2}$，

……

$b_n=b_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$，

于是 $b_n=b_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$=2-\frac{1}{2^{n-1}}\ (n\geqslant 2)$.

又 $b_1=1$，

故所求的通项公式 $b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_n=n(2-\frac{1}{2^{n-1}})=2n-\frac{n}{2^{n-1}}$.

令 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$，则 $2T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-2}}$.

于是

$$\begin{aligned}T_n&=2T_n-T_n\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}\\&=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

又 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$，

所以 $S_n=n(n+1)+\frac{n+2}{2^{n-1}}-4$.

（21）**解:**

（Ⅰ）将 $y^2=x$ 代入 $(x-4)^2+y^2=r^2$，并化简得

$$x^2-7x+16-r^2=0.\quad ①$$

E 与 M 有四个交点的充要条件是方程①有两个不等的正根 x_1、x_2.

由此得 $\begin{cases}\Delta=(-7)^2-4(16-r^2)>0,\\x_1+x_2=7>0,\\x_1x_2=16-r^2>0.\end{cases}$

解得 $\frac{15}{4}<r^2<16$，

又 $r>0$，

所以 r 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$.

（Ⅱ）不妨设 E 与 M 的四个交点的坐标为：

$$A(x_1,\sqrt{x_1})、B(x_1,-\sqrt{x_1})、C(x_2,-\sqrt{x_2})、D(x_2,\sqrt{x_2}).$$

则直线 AC、BD 的方程分别为

$$y-\sqrt{x_1}=\frac{-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)，\quad y+\sqrt{x_1}=\frac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)，$$

解得点 P 的坐标为 $(\sqrt{x_1x_2},0)$.

设 $t=\sqrt{x_1x_2}$，由 $t=\sqrt{16-r^2}$ 及（Ⅰ）知 $0<t<\frac{7}{2}$.

由于四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，因而其面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2})\cdot|x_2-x_1|.$$

则 $\qquad S^2=(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$.

将 $x_1+x_2=7$，$\sqrt{x_1x_2}=t$ 代入上式，并令 $f(t)=S^2$，得

$$f(t)=(7+2t)^2\cdot(7-2t)\ (0<t<\frac{7}{2}).$$

求导数，$f'(t)=-2(2t+7)(6t-7)$.

令 $f'(t)=0$，解得 $t=\frac{7}{6}$，$t=-\frac{7}{2}$（舍去）.

当 $0<t<\frac{7}{6}$ 时，$f'(t)>0$；$t=\frac{7}{6}$ 时，$f'(t)=0$；$\frac{7}{6}<t<\frac{7}{2}$ 时，$f'(t)<0$.

故当且仅当 $t=\frac{7}{6}$ 时，$f(t)$ 有最大值，即四边形 $ABCD$ 的面积最大，故所求的点 P 的坐标为 $(\frac{7}{6},0)$.

（22）**解:**

（Ⅰ）$f'(x)=3x^2+6bx+3c$，

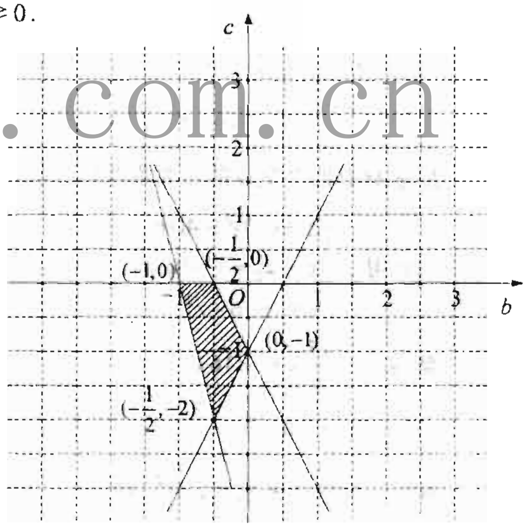
依题意知，方程 $f'(x)=0$ 有两个根 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0]$，$x_2\in[1,2]$ 等价于

$$f'(-1)\geqslant 0,\ f'(0)\leqslant 0,\ f'(1)\leqslant 0,\ f'(2)\geqslant 0.$$

由此得 b、c 满足的约束条件为

$$\begin{cases} c\geqslant 2b-1, \\ c\leqslant 0, \\ c\leqslant -2b-1, \\ c\geqslant -4b-4. \end{cases}$$

满足这些条件的点 (b,c) 的区域为图中阴影部分.



（Ⅱ）由题设知 $f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$，故 $bx_2=-\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}c$，

于是 $\qquad f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$.

由于 $x_2\in[1,2]$，而由（Ⅰ）知 $c\leqslant 0$，故

$$-4+3c\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c.$$

又由（Ⅰ）知 $-2\leqslant c\leqslant 0$，

所以 $\qquad -10\leqslant f(x_2)\leqslant -\frac{1}{2}$.