绝密 ★ 启用前

2009年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学(必修+选修Ⅰ)

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。考生作答时，将答案答在答题卡上，在本试题卷上答题无效。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必先认真核对条形码上的姓名、考生号、考场号和座位号，无误后将本人姓名、考生号、考场号和座位号填在答题卡相应位置，座位号同时填涂在答题卡背面左上角，将条形码粘贴在答题卡指定的位置，并将试题卷装订线内项目填写清楚。

2. 选择题答案必须使用2B铅笔规范填涂。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

3. 非选择题答题时，必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔书写；作图时，可用2B铅笔，笔迹要清晰。

4. 严格按题号所指示的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

5. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁在答题卡上作任何标记，严禁使用涂改液和修正带。

第Ⅰ卷

本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么n次独立重复试验中事件A恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R表示球的半径

一. 选择题

(1) $\sin 585^\circ$ 的值为

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 设集合 $A=\{4,5,7,9\}, B=\{3,4,7,8,9\}$，全集 $U=A\cup B$，则集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中的元素共有

(A) 3 个　　(B) 4 个　　(C) 5 个　　(D) 6 个

(3) 不等式 $|\frac{x+1}{x-1}|<1$ 的解集为

(A) $\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$　　(B) $\{x|0<x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<0\}$　　(D) $\{x|x<0\}$

(4) 已知 $\tan\alpha=4,\ \cot\beta=\frac{1}{3}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$

(A) $\frac{7}{11}$　　(B) $-\frac{7}{11}$　　(C) $\frac{7}{13}$　　(D) $-\frac{7}{13}$

(5) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，则该双曲线的离心率等于

(A) $\sqrt{3}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $\sqrt{6}$

(6) 已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)=1+2\lg x\ (x>0)$，则 $f(1)+g(1)=$

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

(7) 甲组有 5 名男同学、3 名女同学；乙组有 6 名男同学、2 名女同学. 若从甲、乙两组中各选出 2 名同学，则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有

(A) 150 种　　(B) 180 种　　(C) 300 种　　(D) 345 种

(8) 设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

(A) 150°　　(B) 120°　　(C) 60°　　(D) 30°

(9) 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点，则异面直线 AB 与 CC_1 所成的角的余弦值为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　(C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　(D) $\frac{3}{4}$

(10) 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图像关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

（11）已知二面角$\alpha-l-\beta$为60°，动点P、Q分别在面α、β内，P到β的距离为$\sqrt{3}$，Q到α的距离为$2\sqrt{3}$，则P、Q两点之间距离的最小值为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）4

（12）已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，右准线为l，点$A\in l$，线段AF交C于点B. 若$\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，则$|\overrightarrow{AF}|=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）3

第II卷

本卷共10小题，共90分。

二. 填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在题中横线上.

（13）$(x-y)^{10}$的展开式中，x^7y^3的系数与x^3y^7的系数之和等于____.

（14）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 若$S_9=72$，则$a_2+a_4+a_9=$____.

（15）已知OA为球O的半径，过OA的中点M且垂直于OA的平面截球面得到圆M. 若圆M的面积为3π，则球O的表面积等于____.

（16）若直线m被两平行线$l_1:x-y+1=0$与$l_2:x-y+3=0$所截得的线段的长为$2\sqrt{2}$，则m的倾斜角可以是

①$15^\circ$　②$30^\circ$　③$45^\circ$　④$60^\circ$　⑤$75^\circ$

其中正确答案的序号是____.　　（写出所有正确答案的序号）

三. 解答题：本大题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分10分）

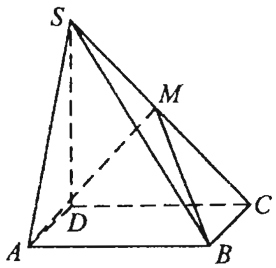
设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比是正数的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n. 已知$a_1=1$，$b_1=3$，$a_3+b_3=17$，$T_3-S_3=12$，求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式.

（18）（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c. 已知 $a^2-c^2=2b$，且 $\sin B=4\cos A\sin C$，求 b.

（19）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，$DC=SD=2$．点 M 在侧棱 SC 上，$\angle ABM=60^\circ$.



（Ⅰ）证明：M 是侧棱 SC 的中点；

（Ⅱ）求二面角 $S-AM-B$ 的大小.

（20）（本小题满分 12 分）

甲、乙二人进行一次围棋比赛，约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束. 假设在一局中，甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，各局比赛结果相互独立. 已知前 2 局中，甲、乙各胜 1 局.

（Ⅰ）求再赛 2 局结束这次比赛的概率；

（Ⅱ）求甲获得这次比赛胜利的概率.

（21）（本小题满分 12 分）

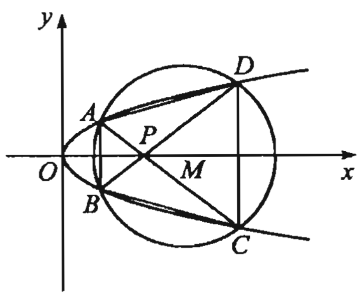
已知函数 $f(x)=x^4-3x^2+6$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设点 P 在曲线 $y=f(x)$ 上，若该曲线在点 P 处的切线 l 通过坐标原点，求 l 的方程.

（22）（本小题满分 12 分）

如图，已知抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 相交于 A、B、C、D 四个点.



（Ⅰ）求 r 的取值范围；

（Ⅱ）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 AC、BD 的交点 P 的坐标.

2009年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题(必修+选修Ⅰ)参考答案

一. 选择题

（1）A （2）A （3）D （4）B （5）C （6）C

（7）D （8）B （9）D （10）A （11）C （12）A

二. 填空题

（13）-240 （14）24 （15）16π （16）①⑤

三. 解答题

（17）解:

设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q.

由$a_3+b_3=17$得$1+2d+3q^2=17$， ①

由$T_3-S_3=12$得$q^2+q-d=4$. ②

由①、②及$q>0$解得 $q=2$，$d=2$.

故所求的通项公式为 $a_n=2n-1$，$b_n=3\times2^{n-1}$.

（18）解:

由余弦定理得

$$a^2-c^2=b^2-2bc\cos A.$$

又 $a^2-c^2=2b,\ b\neq0$，

所以 $b=2c\cos A+2$. ①

由正弦定理得 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$，

又由已知得 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=4\cos A$，

所以 $b=4c\cos A$. ②

故由①、②解得

$$b=4.$$

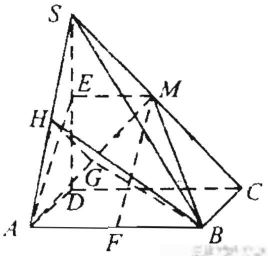
（19）**解法一：**

（Ⅰ）作 $ME // CD$ 交 SD 于点 E，则 $ME // AB$， $ME \perp$ 平面 SAD.

连接 AE，则四边形 $ABME$ 为直角梯形.

作 $MF \perp AB$，垂足为 F，则 $AFME$ 为矩形.

设 $ME = x$，则 $SE = x$， $AE = \sqrt{ED^2 + AD^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 2}$，



$MF = AE = \sqrt{(2-x)^2 + 2}$，$FB = 2 - x$.

由 $MF = FB \cdot \tan 60^\circ$，得 $\sqrt{(2-x)^2 + 2} = \sqrt{3}(2-x)$，

解得 $x = 1$.

即 $ME = 1$，从而 $ME = \frac{1}{2}DC$，

所以 M 为侧棱 SC 的中点.

（Ⅱ） $MB = \sqrt{BC^2 + MC^2} = 2$， 又 $\angle ABM = 60^\circ$， $AB = 2$，所以 $\triangle ABM$ 为等边三角形.

又由（Ⅰ）知 M 为 SC 中点，

$SM = \sqrt{2}$，$SA = \sqrt{6}$，$AM = 2$，故 $SA^2 = SM^2 + AM^2$，$\angle SMA = 90^\circ$.

取 AM 中点 G，连结 BG，取 SA 中点 H，连结 GH，则 $BG \perp AM$，$GH \perp AM$，

由此知 $\angle BGH$ 为二面角 $S-AM-B$ 的平面角.

连接 BH. 在 $\triangle BGH$ 中，

$$BG = \frac{\sqrt{3}}{2}AM = \sqrt{3}，\quad GH = \frac{1}{2}SM = \frac{\sqrt{2}}{2}，\quad BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \frac{\sqrt{22}}{2}，$$

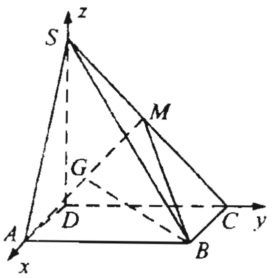
所以 $$\cos\angle BGH = \frac{BG^2 + GH^2 - BH^2}{2 \cdot BG \cdot GH} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

二面角 $S-AM-B$ 的大小为 $\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

解法二：

以 D 为坐标原点，射线 DA 为 x 轴正半轴，建立如图所示的直角坐标系 $D-xyz$.

设 $A(\sqrt{2},0,0)$，则 $B(\sqrt{2},2,0)$， $C(0,2,0)$， $S(0,0,2)$.



（Ⅰ）设 $\overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{MC}$ $(\lambda > 0)$，则

$$M(0,\frac{2\lambda}{1+\lambda},\frac{2}{1+\lambda})，\overrightarrow{MB} = (\sqrt{2},\frac{2}{1+\lambda},\frac{-2}{1+\lambda}).$$

又 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB}\rangle=60^\circ$，

故 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{MB}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos 60^\circ$，

即 $\frac{4}{1+\lambda}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\frac{2}{1+\lambda})^2+(\frac{-2}{1+\lambda})^2}$，

解得 $\lambda=1$，即 $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{MC}$.

所以 M 为侧棱 SC 的中点.

（Ⅱ）由 $M(0,1,1)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，得 AM 的中点 $G(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

又 $\overrightarrow{GB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{MS}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,1)$.

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\ \overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AM}=0,$$

所以 $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AM}$.

因此 $\langle\overrightarrow{GB},\overrightarrow{MS}\rangle$ 等于二面角 $S-AM-B$ 的平面角.

$$\cos\langle\overrightarrow{GB},\overrightarrow{MS}\rangle=\frac{\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{MS}}{|\overrightarrow{GB}|\cdot|\overrightarrow{MS}|}=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以二面角 $S-AM-B$ 的大小为 $\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

（20）**解**：

记 A_i 表示事件：第 i 局甲获胜，$i=3,4,5$，

B_j 表示事件：第 j 局乙获胜，$j=3,4$.

（Ⅰ）记 A 表示事件：再赛 2 局结束比赛.

$$A=A_3\cdot A_4+B_3\cdot B_4.$$

由于各局比赛结果相互独立，故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_3\cdot A_4+B_3\cdot B_4)=P(A_3\cdot A_4)+P(B_3\cdot B_4)\\&=P(A_3)P(A_4)+P(B_3)P(B_4)\\&=0.6\times0.6+0.4\times0.4\\&=0.52.\end{aligned}$$

（Ⅱ）记 B 表示事件：甲获得这次比赛的胜利.

因前两局中，甲、乙各胜一局，故甲获得这次比赛的胜利当且仅当在后面的比赛中，甲先胜 2 局，从而

$$B = A_3 \cdot A_4 + B_3 \cdot A_4 \cdot A_5 + A_3 \cdot B_4 \cdot A_5,$$

由于各局比赛结果相互独立，故

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_3 \cdot A_4) + P(B_3 \cdot A_4 \cdot A_5) + P(A_3 \cdot B_4 \cdot A_5) \\ &= P(A_3)P(A_4) + P(B_3)P(A_4)P(A_5) + P(A_3)P(B_4)P(A_5) \\ &= 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 \times 0.6 \\ &= 0.648. \end{aligned}$$

（21）解：

（Ⅰ）$f'(x) = 4x^3 - 6x = 4x(x + \frac{\sqrt{6}}{2})(x - \frac{\sqrt{6}}{2})$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ 和 $x \in (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 时，$f'(x) < 0$；

当 $x \in (-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ 和 $x \in (\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$.

因此，$f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ 和 $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 是减函数，

$f(x)$ 在区间 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ 是增函数.

（Ⅱ）设点 P 的坐标为 $(x_0, f(x_0))$，由 l 过原点知，l 的方程为

$$y = f'(x_0)x.$$

因此 $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$，

即 $x_0^4 - 3x_0^2 + 6 - x_0(4x_0^3 - 6x_0) = 0$，

整理得 $(x_0^2 + 1)(x_0^2 - 2) = 0$.

解得 $x_0 = -\sqrt{2}$ 或 $x_0 = \sqrt{2}$.

因此切线 l 的方程为 $y = -2\sqrt{2}x$ 或 $y = 2\sqrt{2}x$.

（22）解：

（Ⅰ）将 $y^2 = x$ 代入 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$，并化简得

$$x^2 - 7x + 16 - r^2 = 0. \qquad ①$$

E 与 M 有四个交点的充要条件是方程①有两个不等的正根 x_1、x_2.

由此得 $\begin{cases}\Delta=(-7)^2-4(16-r^2)>0, \\ x_1+x_2=7>0, \\ x_1x_2=16-r^2>0.\end{cases}$

解得 $\frac{15}{4}<r^2<16$，

又 $r>0$，

所以 r 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$．

（Ⅱ）不妨设 E 与 M 的四个交点的坐标为：

$$A(x_1,\sqrt{x_1})、B(x_1,-\sqrt{x_1})、C(x_2,-\sqrt{x_2})、D(x_2,\sqrt{x_2}).$$

则直线 AC、BD 的方程分别为

$$y-\sqrt{x_1}=\frac{-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1),\quad y+\sqrt{x_1}=\frac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1),$$

解得点 P 的坐标为 $(\sqrt{x_1x_2},0)$．

设 $t=\sqrt{x_1x_2}$，由 $t=\sqrt{16-r^2}$ 及（Ⅰ）知 $0<t<\frac{7}{2}$．

由于四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，因而其面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2})\cdot|x_2-x_1|.$$

则 $S^2=(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$．

将 $x_1+x_2=7$，$\sqrt{x_1x_2}=t$ 代入上式，并令 $f(t)=S^2$，得

$$f(t)=(7+2t)^2\cdot(7-2t)=-8t^3-28t^2+98t+343\ (0<t<\frac{7}{2}).$$

求导数，$f'(t)=-24t^2-56t+98=-2(2t+7)(6t-7)$．

令 $f'(t)=0$，解得 $t=\frac{7}{6}$，$t=-\frac{7}{2}$（舍去）．

当 $0<t<\frac{7}{6}$ 时，$f'(t)>0$；$t=\frac{7}{6}$ 时，$f'(t)=0$；$\frac{7}{6}<t<\frac{7}{2}$ 时，$f'(t)<0$．

故当且仅当 $t=\frac{7}{6}$ 时，$f(t)$ 有最大值，即四边形 $ABCD$ 的面积最大，故所求的点 P 的坐标为 $(\frac{7}{6},0)$．